Probabilidad y Estadística II – Primer Parcial – Tema 1

1) Un juego consiste en tirar un dado: Si saca 1, 2 o 3, pierde un punto. Si saca 4 o 5, gana un punto y si saca 6 (sin ganar o perder puntos) vuelve a tirar con el mismo puntaje salvo que si saca nuevamente 6 termina el juego sin puntos.

a) Encontrar la función de probabilidad para la variable "puntaje ganado".
b) ¿Qué puntaje, en promedio, espera sacar el jugador si repite el juego muchas veces?

a)

Experimento: Tira un dado con ciertas reglas de juego.

A: suceso "saca 1, 2 o 3".
B: suceso "saca 4 o 5".
C: suceso 6.

$$\text{Tira el dado}\begin{cases} P(A)=\dfrac{1}{6}\rightarrow \text{Pierde un punto} \\ P(B)=\dfrac{1}{6}\rightarrow \text{Gana un punto} \\ P(C)=\dfrac{1}{6}\rightarrow \text{Tira nuevamente}\begin{cases} P(A/C)=\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Pierde un punto} \\ P(A/C)=\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Gana un punto} \\ P(A/C)=\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Sin puntos} \end{cases} \end{cases}$$

X: puntaje sacado $\Rightarrow$ **X**={-1, 0, 1}

$$P(X=-1)=P\left[1A\cup(1C\cap 2A)\right]=P(1A)+P(1C).P(2A/1C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$

$$P(X=0)=P\left[1C\cap 2C\right]=P(1C).P(2C/1C)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(X=1)=P\left[1B\cup(1C\cap 2B)\right]=P(1B)+P(1C).P(2B/1C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$$

Función de probabilidad:

X	-1	0	1
P(X)	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$

b) $E(X)=\sum_{x_i\in X}P(x_i).x_i=\frac{7}{12}.(-1)+\frac{1}{36}.0+\frac{7}{18}.1=-\frac{7}{36}\cong -0{,}194$

Si repite muchas veces el juego, el jugador perderá en promedio aproximadamente 0,194 puntos por juego.

2) La longitud (en cm) de remaches fabricados por cierta máquina responde aproximadamente a la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(X)=\begin{cases} X-1 & \text{si } 1\le X\le 2 \\ -X+3 & \text{si } 2\le X\le 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre F(x) y grafique f(X) y F(x).

b) Si el control de calidad descarta los tornillos de menos de 1,6 y un comprador requiere que dichos tornillos no superen los 2,1 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo elegido al azar entre los aceptados por el control de calidad, le sirva al comprador?

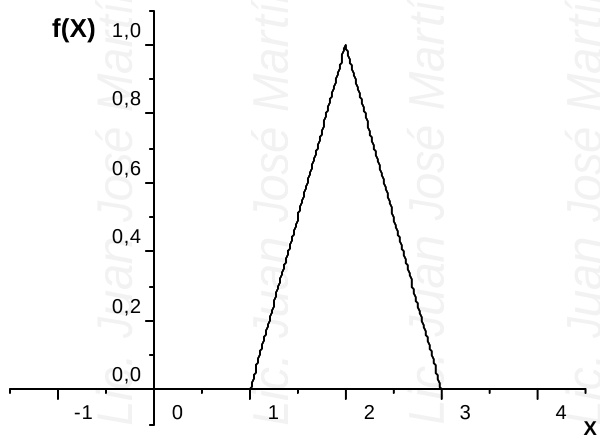
$$\text{Si } x<1:\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(X).dX=\int_{-\infty}^{x} 0.dX=0$$

$$\text{Si } 1\le x<2:\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(X).dX=\int_{-\infty}^{1} 0.dX+\int_{1}^{x}(X-1).dX=\left.\frac{X^2}{2}-X\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}$$

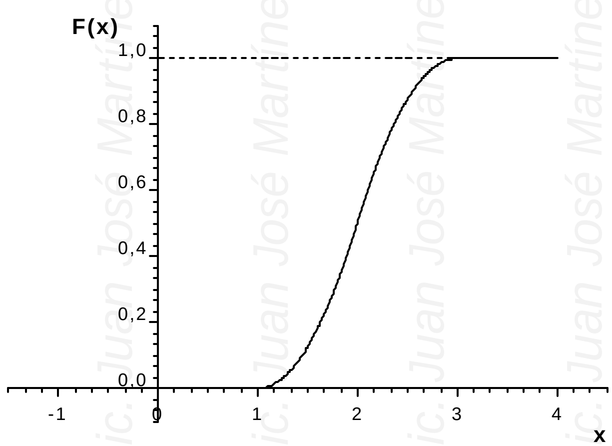
$$\text{Si } 2\le x<3:\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(X).dX=\int_{-\infty}^{1} 0.dX+\int_{1}^{2}(X-1).dX+\int_{2}^{x}(-X+3).dX=\left.\left(\frac{X^2}{2}-X\right)\right]_1^2+\left.\left(-\frac{X^2}{2}+3.X\right)\right]_2^x=-\frac{x^2}{2}+3.x-\frac{7}{2}$$

$$\text{Si } x\ge 3:\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(X).dX=\int_{-\infty}^{1} 0.dX+\int_{1}^{2}(X-1).dX+\int_{2}^{3}(-X+3).dX+\int_{3}^{x}0.dX=\left.\left(\frac{X^2}{2}-X\right)\right]_1^2+\left.\left(-\frac{X^2}{2}+3.X\right)\right]_2^3=1$$

$$f(X)=\begin{cases} X-1 & \text{si } 1\le X\le 2\\ -X+3 & \text{si } 2\le X\le 3\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1\\ \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ -\frac{x^2}{2}+3.x-\frac{7}{2} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$



b)

$$P(\text{sirvaalcomprador/aceptadopor el control de calidad}) = P(X \le 2{,}1 / X \ge 1{,}6) = \frac{P(X \le 2{,}1 \cap X \ge 1{,}6)}{P(X \ge 1{,}6)} =$$

$$= \frac{P(1{,}6 \le X \le 2{,}1)}{P(X \ge 1{,}6)} = \frac{F(2{,}1) - F(1{,}6)}{1 - F(1{,}6)} = \frac{\left(-\frac{2{,}1^2}{2} + 3.2{,}1 - \frac{7}{2}\right) - \left(\frac{1{,}6^2}{2} - 1{,}6 + \frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1{,}6^2}{2} - 1{,}6 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{0{,}595 - 0{,}18}{1 - 0{,}18} \cong 0{,}506$$

3) Se sabe que la eficacia de un medicamento en una población determinada es del 90%. Si se administra la droga a 10 pacientes, calcular:

a) La probabilidad de que resulte eficaz en más de 8 pacientes.
b) La probabilidad de que no surta efecto en el primer paciente y que lo haga en por lo menos uno del resto de ellos.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Experimento: estudiar la eficiencia de un medicamento en un grupo de pacientes.} \\ \text{Éxito: el medicamento resulta eficaz} \Rightarrow p=0{,}90 \text{ y } q=0{,}10. \\ n=10 \text{ (pacientes) independientes} \\ X\text{: nº de pacientes en que el medicamento resulta eficaz:} \end{array}\right\} X \propto Bi(10;\ 0{,}90)$$

a) $P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9}.0{,}90^9.0{,}10^1 + \binom{10}{10}.0{,}90^{10}.0{,}10^0 \cong 0{,}7361$

b) A: No resulta eficiente en el primer paciente

B: Resulta eficiente en por lo menos un paciente de los 9 restantes.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = q.P(X' \ge 1) = q.[1 - P(X' = 0)] = 0{,}1.\left[1 - \binom{9}{0}.0{,}90^0.0{,}10^9\right] = 0{,}0999999999$$

Probabilidad y Estadística II – Primer Parcial – Tema 2

1) Un bolillero contiene 6 bolillas rojas y 4 blancas. Un juego consiste en lo siguiente:
Extrae al azar una primer bolilla, si sale blanca gana un punto y vuelve a introducir la bolilla en el bolillero; si sale roja pierde un punto y deja la bolilla afuera. Luego vuelve a sacar una bolilla, si sale blanca pierde un punto y si sale roja no gana ni pierde.

a) Encontrar la función de probabilidad para la variable “puntaje ganado”.
b) ¿Qué probabilidad tiene el jugador de ganar más de lo esperado?

$$\boxed{\begin{matrix}6R\\4B\end{matrix}}\begin{cases} P(1B)=\dfrac{4}{10}\to \text{gana un punto}\to \boxed{\begin{matrix}6R\\4B\end{matrix}}\begin{cases}P(2B/1B)=\dfrac{4}{10}\to \text{pierde un punto}\to \text{total: 0 puntos}\\ P(2R/1B)=\dfrac{6}{10}\to \text{ningún punto}\to \text{total: 1 punto}\end{cases}\\ \\ P(1R)=\dfrac{6}{10}\to \text{pierdeunpunto}\to \boxed{\begin{matrix}5R\\4B\end{matrix}}\begin{cases}P(2B/1R)=\dfrac{4}{9}\to \text{pierde un punto}\to \text{total: -2 puntos}\\ P(2R/1R)=\dfrac{5}{9}\to \text{ningún punto}\to \text{total: -1 puntos}\end{cases}\end{cases}$$

X: puntaje sacado $\Rightarrow$ **X**={-2; -1; 0; 1}

$$P(X=-2)=P\left[1R\cap 2B\right]=P(1R).P(2B/1R)=\frac{6}{10}.\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$
$$P(X=-1)=P\left[1R\cap 2R\right]=P(1R).P(2R/1R)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$
$$P(X=0)=P\left[1B\cap 2B\right]=P(1B).P(2B/1B)=\frac{4}{10}.\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$$
$$P(X=1)=P\left[1B\cap 2R\right]=P(1B).P(2R/1B)=\frac{4}{10}.\frac{6}{10}=\frac{6}{25}$$

Función de probabilidad:

X	-2	-1	0	1
P(X)	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$

b) $E(X)=\sum_{x_i\in \mathbf{X}} P(x_i).x_i=\frac{4}{15}.(-2)+\frac{1}{3}.(-1)+\frac{4}{25}.0+\frac{6}{25}.1=-\frac{47}{75}\cong -0{,}627$

Si repite muchas veces el juego, el jugador perderá en promedio aproximadamente 0,627 puntos por juego.

$$P(X>-\frac{47}{75})=P(X\geq 0)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{4}{25}+\frac{6}{25}=\frac{2}{5}$$

2) Sea la variable aleatoria x: "tiempo en minutos que transcurre entre la salida de dos unidades consecutivas de una línea de producción", definiéndose la función de densidad como:

$$f(X)=\begin{cases}-\dfrac{X^2}{18}+a & \text{si } 0\leq X\leq 3\\ 0 \ \text{ en otro caso}\end{cases}$$

a) Halle el valor de "a". Calcular F(x). Graficar f(X) y F(x)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tardando más de un minuto no supere los 2 minutos?

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X).dX = \int_{-\infty}^{0} 0.dX + \int_{0}^{3}(-\frac{X^2}{18}+a).dX + \int_{3}^{+\infty} 0.dX = -\int_{0}^{3}\frac{X^2}{18}.dX + a.\int_{0}^{3} dX = -\frac{X^3}{54}+a.X\Big]_{0}^{3} = -\frac{3^3}{54}+a.3 = -\frac{1}{2}+3.a = 1$$

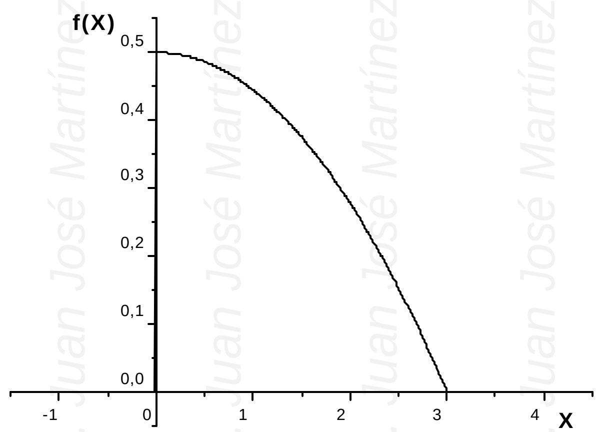
$$\Rightarrow 3.a = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

b) $$\text{Si } x < 0: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(X).dX = \int_{-\infty}^{x} 0.dX = 0$$

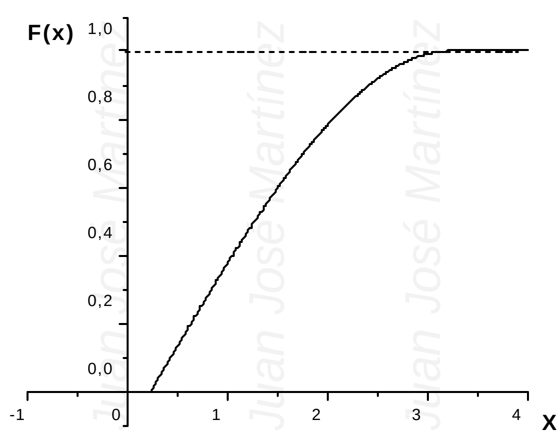
$$\text{Si } 0 \le x < 3: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(X).dX = \int_{-\infty}^{0} 0.dX + \int_{0}^{x}(-\frac{X^2}{18}+\frac{1}{2}).dX = \left(-\frac{X^3}{54}+\frac{1}{2}.X\right)\Big]_{0}^{x} = -\frac{x^3}{54}+\frac{1}{2}.x$$

$$\text{Si } x \ge 3: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(X).dX = \int_{-\infty}^{0} 0.dX + \int_{0}^{3}(-\frac{X^2}{18}+\frac{1}{2}).dX + \int_{3}^{+\infty} 0.dX = \left(-\frac{X^3}{54}+\frac{1}{2}.X\right)\Big]_{0}^{3} = 1$$

$$f(X) = \begin{cases} -\frac{X^2}{18}+a & \text{si } 0 \le X \le 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{x^3}{54}+\frac{1}{2}.x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



b)

$$P(X \le 2 / X > 1) = \frac{P(X \le 2 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(1 < X \le 2)}{P(X > 1)} = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{\left(-\frac{2^3}{54} + \frac{2}{2}\right) - \left(-\frac{1^3}{54} + \frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1^3}{54} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{23}{27} - \frac{13}{27}}{1 - \frac{13}{27}} = \frac{5}{7}$$

3) Un agente de seguros vende pólizas a 5 hombres de buena salud, todos de la misma edad. De acuerdo a las tablas actuariales de la Compañía, la probabilidad de que un hombre a esta edad particular esté vivo al cabo de 30 años es de 2/3. Hallar la probabilidad de que en 30 años estén muertos:

a) los 5 hombres
b) solo dos de ellos.
c) el primero al cual vendió la póliza.

Experimento: estudiar la sobrevida de un grupo de clientes de una aseguradora.
Éxito: el cliente no sobrevive al cabo de 30 años $\Rightarrow$ p=1/3 y q=2/3.
n=5 (clientes) independientes
X: nº de clientes que no sobreviven al cabo de 30 años

$\Bigg\}\; X \propto Bi(5;1/3)$

a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} . \left(\frac{1}{3}\right)^5 . \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cong 4{,}12.10^{-3}$

b) $P(X = 2) = \binom{5}{2} . \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5!}{2!.3!} . \frac{8}{243} \cong 0{,}329$

c) $P(\text{el primero de ellos}) = \frac{1}{3}$