Materia: Probabilidad y Estadística II
Tema: Distribuciones

1) Una compañía de seguros sabe que el promedio de siniestros mensuales ocurridos en el riesgo incendios es 6.5 siniestros por mes. Determinar la probabilidad de que:
a) en un mes tenga que pagar al menos 7 siniestros.
b) en el año 2001, a lo sumo en 5 meses tenga que pagar al menos 7 siniestros mensuales.

Se estudia la ocurrencia de siniestros (sucesos) distribuidos en un intervalo un lapso de un mes (continuo). Lo que indica una variable de Poisson:
Densidad de ocurrencias: $\delta = 6{,}5 \text{ siniestros } / \text{mes}$

a) $\left.\begin{array}{l}\delta = 6{,}5 \text{ siniestros } / \text{ mes} \\ \Delta t = 1 \text{ mes}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \delta.\Delta t = 6{,}5 \text{ siniestros } / \text{mes}.1 \text{ mes} = 6{,}5 \text{ siniestros } \Rightarrow X \sim P(6{,}5)$

Por lo tanto X (número de siniestros en un mes) sigue una distribución de Poisson con parámetro 6,5:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-6,5}.6{,}5^{x}}{x!} \cong 0{,}4735$$

(Podés ir la tabla de Poisson acumulada con λ=6,5.)

b) Experimento: estudiar durante todo el 2001 (doce meses independientes) si ocurren (éxito) o no (fracaso) al menos 7 en cada mes siniestros al mes. Así:

Éxito: ocurren al menos 7 siniestros en el mes: $p = 0{,}4735 \Rightarrow q = 0{,}5265$
n=12 meses (repeticiones independientes)
Y: número de meses, entre 12, donde hay al menos 7 siniestros $\rightarrow Y \sim Bi(12 \; ; 0{,}4735)$ (binomial!!)

$$P(Y \leq 5) = \sum_{y=0}^{5} \binom{12}{y} 0{,}4735^{\,y}.0{,}5265^{\,12-y} \cong 0{,}4605$$

(podés ir a la tabla de Binomial para n=12 y p≅0,47)

2) De un grupo de habitantes, el 40% está afiliado al partido A, el 30% al B y el resto a otros partidos. Se consulta a un grupo de 20 personas. Determinar la probabilidad de que a lo sumo 5 pertenezcan a al partido B.

<u>Experimento</u>: se eligen (supuestamente al azar) 20 personas de una cierta población y se estudia si pertenecen o no a un partido político.
Población dicotómica (pertenecen a "B" o no pertenecen) de tamaño desconocido (por lo tanto la suponemos tan grande como para considerarla infinita).
Éxito: pertenecer al partido "B". $\Rightarrow$ p=0,30 y q==0,70
X: nº de personas, entre las 20 elegidas, que pertenecen al partido "B".
Al ser una población infinita cada extracción no altera la distribución (proporción de éxitos y fracasos en la población) por lo que podemos considerarlas independientes. Así, se trata de estudiar el nº de éxitos en 20 repeticiones <u>independientes</u> del mismo experimento elemental de Bernoulli (éxito-fracaso):

$\Rightarrow X \sim Bi(\; 20 \; : 0{,}30)$

$$P(\text{a lo sumo 5 pertenezcan a B}) = P(X \le 5) = \sum_{x=0}^{5} P(X = x) = \sum_{x=0}^{5} \binom{5}{x} 0{,}30^{x} . 0{,}70^{5-x} \cong 0{,}4164$$

3) En un servicio hospitalario se está estudiando la posibilidad de aplicar una nueva reacción a sus pacientes. Por experiencias en servicios similares de otros hospitales, se sabe que la probabilidad de que la reacción dé positivo en todos los integrantes de un grupo de 5 pacientes es de 0,0003. Si se aplica la reacción a un grupo de 500 pacientes, calcular la probabilidad de que más de 120 de los mismos presenten una reacción positiva.

Experimento: se eligen (al azar) un dado nº de pacientes cierta población hospitalaria y se estudia su respuesta acierta reacción.
Los pacientes se consideran independientes entre sí. Éxito: reacción de positiva.
De datos anteriores:
X: nº de pacientes, entre 5, en los que la reacción da positiva $\Rightarrow$ se puede considerar una distribución binomial con "p" desconocida.

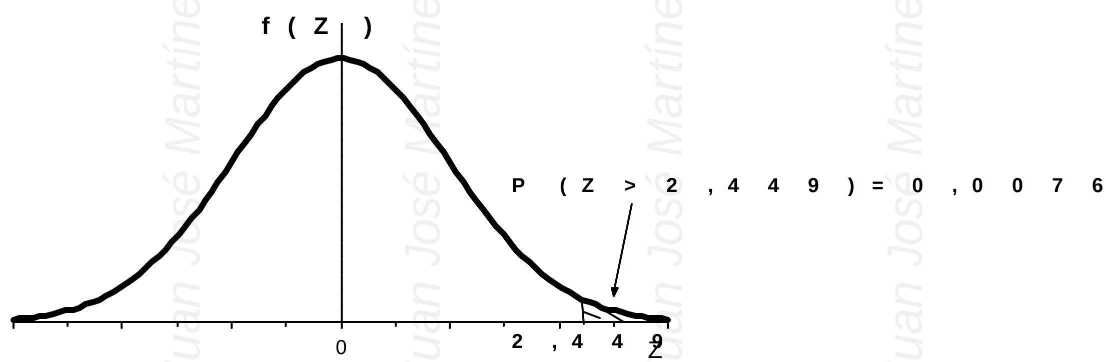
$$X \sim Bi(5\ ;\ p\ ), \text{ Pero: } P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 . q^0 = p^5 = 0{,}0003 \Rightarrow p = \sqrt[5]{0{,}0003} \cong 0{,}1974$$

Ahora se toma un grupo de n=500 pacientes: Y: nº de pacientes, entre 500, en los cuales la reacción da positiva.

$X \sim Bi(500\ ;\ 0{,}1974\ )$, calcular $P(X \le 120) = \sum_{x=0}^{120} \binom{500}{x} 0{,}1974^{x} . 0{,}8026^{500-x}$ es muy engorroso. Así que como "n" es grande. "p" pequeño y su producto p.n $\cong$ 500.0,1974 = 98,7>20 podemos aproximar a través de una distribución normal:

$$\left.\begin{array}{l} E(Y) = n.p \cong 8{,}9 \Rightarrow \mu = 8{,}9 \\ Var(Y) = n.p.q \cong 79{,}22 \Rightarrow \sigma \cong 8{,}9 \end{array}\right\} Y \sim N(\mu;\sigma^2)$$

$$P(Y > 120) = P(Y \ge 121) = \underbrace{P(Y > 120{,}5)}_{\text{corrección por continuidad}} = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{120{,}5 - 98{,}7}{8{,}9}\right) = P(Z > 2{,}449) = 1 - F(2{,}449) \cong 0{,}0076$$



4) ***En un molino harinero, una máquina automática envasa el producto en bolsas cuyo peso neto tiene una distribución normal con media de 900 gr y desvío estándar de 10 gr. La Secretaría de Comercio realiza una inspección y elige al azar 32 bolsas aplicando una multa si existe por lo menos una de ellas con un peso neto inferior a 880 gr. Determinar la probabilidad de que se aplique la multa al establecimiento.***

X: peso neto del producto de cierto molino harinero, expresado en gr.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \,/\, \mu = 900 \text{ gr} \text{ y } \sigma = 10 \text{ gr}$

$$P(X < 880\,\text{gr}) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{880-900}{10}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 0{,}02275$$

Y: Número de bolsas con pesos menores a 880 gr.

$Y \prec Bi(n, p) \,/\, n = 32\,,\ p = 0{,}02275 \Rightarrow q = 0{,}97725$

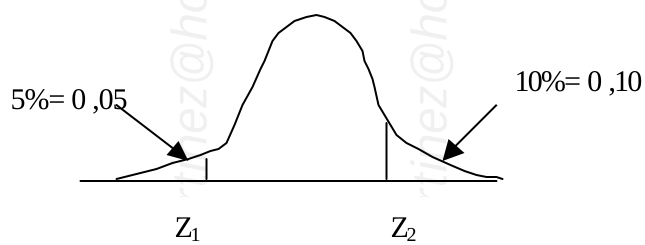
$$P(\text{multa}) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{32}{2}(0{,}002275)^0 . (0{,}97725)^{32} = 0{,}52117$$

$$\Rightarrow P(\text{multa}) = 0{,}52117$$

5) ***El diámetro (en cm) de los granos de cierto producto químico tiene una distribución normal (0,1 ; 0,0025). Para uniformar el producto se desea eliminar el 10 % de diámetro mayor y el 5% de diámetro menor mediante el uso de tamices. Indicar el tamaño de la malla de los granos.***

X: diámetro de los granos, expresado en cm.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \,/\, \mu = 0{,}1 \text{ cm} \text{ y } \sigma = 0{,}05 \text{ cm}$



$$P(X < X_1) = P\left(Z < \frac{X_1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \frac{X_1 - 0{,}1}{0{,}05} = -1{,}645 \Rightarrow X_1 \cong 0{,}018$$

$$P(X > X_2) = P\left(Z > \frac{X_2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}10 \Rightarrow \frac{X_2 - 0{,}1}{0{,}05} = 1{,}285 \Rightarrow X_2 \cong 0{,}0164$$

La malla de 0,018 cm permite pasar los granos de diámetro menor, los que se descartan. Los que quedan se pasan por otro tamiz de 0,164, descartando los que retiene.

6) ***El número de buques tanque que llega cada día a cierta refinería tiene una distribución de Poisson con parámetro 2. Las actuales condiciones portuarias pueden despachar 3 buques al días. ¿En cuánto deben aumentar las instalaciones actuales para permitir la atención de todos los buques tanque por lo menos el 90% de los días?***

X: número de buques tanque que llega, por día, a cierta refinería.

$X \prec P(\lambda) \,/\, \lambda = 2 \text{ buques}.$

La distribución de llegada depende de los buques y no de las instalaciones $\Rightarrow$ la distribución no se modifica.

La probabilidad de que en un día cual quiera lleguen a puerto hasta tres barcos es

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}8572$$

$\Rightarrow$ Así las instalaciones actuales pueden despachar todos los buques aproximadamente el 85,6% de los días. ¿Cuántos buques deberá poder despachar el puerto para cubrir los requerimientos de por lo menos el 90% de los días? :

$$k\,?\ /\ P(X \le k) \ge 0{,}90 \Rightarrow \text{de tablas}: \ P(X \le 4) \ge 0{,}9474 \Rightarrow k = 4$$

Es decir, si las instalaciones se amplían para permitir la atención de un buque más, los requerimientos de flujo portuario estarán cubiertos en más del 90% de los días.

7) Un dado producto es envasado en botellas tal que su contenido sigue una distribución aproximadamente normal con media de 500 cm^3 y desvío de 20 cm^3.

a) Si el control de calidad rechaza una botella con menos de 480 cm^3, ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una botella al azar, ésta resulte rechazada?

b) Si dichas botellas son empaquetadas en cajas de 6, ¿Cuál es la probabilidad de que al abrir una caja tomada aleatoriamente contenga por lo menos una botella que no cumple las normas de control de calidad?

a) Experimento: sobre el contenido de cierto producto envasado en botellas.
X: contenido de las botellas, en cm^3.
$X \sim N(\mu\,;\sigma^2)\ /\ \mu=500$ y $\sigma=20$.

$$P(\text{rechazo}) = P(X < 480) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{480-500}{20}\right) = P(Z < -1) = F(-1) \cong 0{,}15866$$

a) Experimento: se estudia sobre 6 botellas la cantidad de ellas que cumplen las especificaciones de calidad.

$$\left.\begin{array}{l} Y: \text{n}^{\circ} \text{ de botellas que no cumplen las normas de control} \\ \text{Exito: No cumplir las normas de calidad} \Rightarrow p = 0{,}15866 \ \text{ y } q = 0{,}8413 \\ \text{cajas de 6 botellas} \Rightarrow n = 6 \\ \text{botellas independientes con igual probabilidad de éxito.} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim Bi(n;p)$$

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{6}{0} 0{,}15866^{0} . 0{,}84134^{6} \cong 0{,}64533$$

8) La longitud de las truchas adultas que se encuentran en cierto arroyo del sur es una variable aleatoria normal con media de 45 cm y desvío de 5 cm.

a) Si se pesca uno de estos peces, ¿cuál es la probabilidad de que su longitud se encuentre entre los 37,5 y 52,5 centímetros.

b) Un pescador profesional asegura que si se sacan 10 truchas, es prácticamente imposible que no haya ninguna que mida entre 37,5 y 52,5 centímetros. Compruebe tal aseveración.

a) Experimento: se estudia la longitud de las truchas de cierto lago.
X: longitud de las truchas, en cm.
$X \sim N(\mu\,;\sigma^2)\ /\ \mu=45$ y $\sigma=5$.

$$P(37{,}5 \le X \le 52{,}5) = P\left(\frac{37{,}5-45{,}0}{5} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{52{,}5-45{,}0}{5}\right) = P(-1{,}5 \le Z \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(-1{,}5) \cong 0{,}866383$$

a) <u>Experimento</u>: Se sacan diez truchas del lago y se sacan conclusiones sobre sus longitudes

$$\left.\begin{array}{l} Y: \text{nº de truchas con longitudes entre } 35{,}5 \text{ y } 52{,}5 \text{ centímetros} \\ \text{Exito : Medir entre } 35{,}5 \text{ y } 52{,}5 \text{ centímetros} \Rightarrow p = 0{,}866383 \quad \text{y } q = 0{,}133617 \\ \text{número de truchas extraidas}: 6 \Rightarrow n = 6 \\ \text{truchas independientes con igual probabilidad de éxito.} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim Bi(n; p)$$

$$P(\text{ninguna entre } 37{,}5 \text{ y } 52{,}5 \text{ cm}) = P(Y=0) = \binom{10}{0} 0{,}866383^{0} . 0{,}133617^{10} = 1{,}81.10^{-9} \cong 0 \Rightarrow \text{Imposible!}$$

9) En un volumen de líquido se encuentran en promedio 0,4 microorganismos por cm^3. Ciertos controles bacteriológicos requieren que en alícuotas de 3,5 cm^3 no deben haber más de 2 microorganismos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una alícuota tomada al azar se cumplan los requerimientos bacteriológicos?

b) Si en cierto control se toman 5 alícuotas de 3,5 cm^3 cada una, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una de ellas cumpla los requerimientos?

a) <u>Experimento</u>: Se estudia la presencia de microorganismos en cierto líquido.

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 0{,}4 \text{ microorg} / cm^3 \\ \Delta V = 3{,}5\, cm^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \delta . \Delta V = 1{,}4 \text{ microorg.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{microorg. distribuidos al azar en cierto volumen} \\ X: \text{nº de microorg. en } 3{,}5\, cm^3 \end{array}\right\} \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(1{,}4)$$

$$P(\text{Cumplir requistos bac.}) = P(X \le 2) = \frac{e^{-1{,}4}.1{,}4^{0}}{0!} + \frac{e^{-1{,}4}.1{,}4^{1}}{1!} + \frac{e^{-1{,}4}.1{,}4^{2}}{2!} \cong 0{,}8335$$

b) <u>Experimento</u>: Control sobre 5 alícuotas de líquido.

$$\left.\begin{array}{l} Y: \text{nº de alícuotas que cumplen los requerimientos bacteriológicos} \\ \text{Exito : Cumplir los requerimientos bacteriológicos} \Rightarrow p = 0{,}8335 \text{ y } q = 0{,}1665 \\ \text{número de alícuotas}: 5 \Rightarrow n = 5 \\ \text{alícuotas independientes con igual probabilidad de éxito.} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim Bi(n; p)$$

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}8335^{0} . 0{,}1665^{5} = 1 - 0{,}1665^{5} \cong 0{,}99987$$

10) El diámetro de los granos de cierto producto químico tiene una distribución normal con media de 1,1 mm y varianza de 0,025 mm^2. Para uniformar el producto se desea eliminar todo grano que difiera de la media en más de 0,7,5 mm (por exceso o defecto), proceso que se lleva a cabo mediante tamices.

a) Indicar que porcentaje de granos cumple esa especificación.

b) Si se seleccionan 10 granos, ¿cuál es la probabilidad que a lo sumo uno de ellos no cumpla con las especificaciones?

a) <u>Experimento</u>: se estudia la longitud de granos de cierto producto químico.
X: diámetro de los granos, en milímetros.
$X \sim N(\mu\ ;\sigma^2)$ / $\mu=1{,}1$ mm y $\sigma^2=0{,}25$ mm^2.

$$P(\text{cumpla las especificaciones}) = P(1{,}1 - 0{,}75 \le X \le 1{,}1 + 0{,}75) = P(0{,}35 \le X \le 1{,}85) =$$

$$= P\left(\frac{0{,}35-1{,}1}{0{,}5} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1{,}85-1{,}1}{0{,}5}\right) = P(-1{,}5 \le Z \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(-1{,}5) \cong 0{,}866383$$

b) <u>Experimento</u>: Se eligen granos para ver si cumplen las especificaciones.

$$\left.\begin{array}{l} Y: \text{n}^{\text{o}} \text{ de granos que no cumplen las especificaciones} \\ \text{Exito}: \text{no cumplir las especificaciones} \Rightarrow p = 1-0{,}8664 = 0{,}1136 \ \text{ y } q = 0{,}8664 \\ \text{número de granos extraidas}: 10 \Rightarrow n = 10 \\ \text{granos independientes con igual probabilidad de éxito.} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim Bi(n;p)$$

$$P(\text{a lo sumo}) = P(Y \le 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{10}{0} 0{,}1336^{0}.0{,}8664^{10} + \binom{10}{1} 0{,}1336^{1}.0{,}8664^{9} \cong 0{,}60585$$

11) Se sabe por experiencias previas que el 30% de las personas afectadas de cierta enfermedad se recuperan. Suponga que se toman al azar 5 personas que sufren dicha enfermedad y se estudia el número de ellas que se recuperan.

a) Calcular la probabilidad de que éste número difiera de lo esperado en menos de 1,8.

b) Comparar con la correspondiente cota de Tchebycheff.

b) <u>Experimento</u>: se estudia la cantidad de personas que se recuperan, entre las 6 tomadas al azar.

$$\left.\begin{array}{l} X: \text{n}^{\text{o}} \text{ de botellas que se recuperan} \\ \text{Exito}: \text{Recuperarse de la enfermedad} \Rightarrow p = 0{,}3 \ \text{ y } q = 0{,}7 \\ \text{muestra de 5 personas} \Rightarrow n = 5 \\ \text{personas independientes con igual probabilidad de éxito.} \end{array}\right\} \Rightarrow X \sim Bi(n;p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = n.p = 5.0{,}3 = 1{,}5 \\ \sigma^2 = n.p.q = 5.0{,}3.0{,}7 = 1{,}05 \end{cases}$$

$$P(|X-1{,}5| < 1{,}8) = P(1{,}5-1{,}8 < X < 1{,}5+1{,}8) = P(-0{,}3 < X < 3{,}3) = P(X=0)+\ldots+P(X=3) == \sum_{x=0}^{3} \binom{5}{x} 0{,}3^{x}.0{,}7^{5-x} \cong 0{,}96922$$

b)

$$P(|X - E(X)| < k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \;\Rightarrow\; k.\sigma = k.\sqrt{p.q.n} = 1{,}8 \Rightarrow k = \frac{1{,}8}{\sqrt{0{,}3.0{,}7.5}} \cong 1{,}75662 \;\Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} \cong 0{,}67593$$

$\Rightarrow$ 0,96922 es una cota inferior para la verdadera probabilidad de 0,96922.

12) Dentro de una caja se encuentran 15 objetos tipo A y 5 tipo B. Se extraen sin reposición 4 de ellos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de objetos tipo A extraídos difiera de la media esperada en por lo menos 2?
b) Comparar con la correspondiente cota de Tchebycheff.

a) <u>Experimento</u>: se estudia el número de objetos tipo A extraídos cuando se sacan 4 objetos de la caja, sin reposición.

$$\left.\begin{array}{l} X : n^{o} \text{ de objetos tipo A que se extraen} \\ \text{Exito : Extraer un objeto Tipo A.} \\ \text{muestra de 4 objetos} \Rightarrow n = 4 \\ \text{Número de objetos} : N = 20 \\ \text{tipo A} : N_E = 15 \text{ tipo B} : N_F = 5 \\ \text{Extracciones sin reposición} \end{array}\right\} \Rightarrow X \sim H(N; N_E; n) \;\; / \left\{\begin{array}{l} E(X) = n.p = 4.\frac{15}{20} = 3 \\ \sigma^2 = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4.\frac{15}{20}.\frac{5}{20}.\left(\frac{20-4}{20-1}\right) \cong \frac{12}{19} \end{array}\right.$$

$$P(|X-3| \geq 2) = 1 - P(|X-3| < 2) = 1 - P(3-2 < X < 3+2) = 1 - P(1 < X < 5) = 1 - [P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)] =$$

$$= 1 - \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{2}}{\binom{20}{4}} - \frac{\binom{15}{3}\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}} - \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{0}}{\binom{20}{4}} \cong 1 - 0{,}2167 - 0{,}4696 - 0{,}2817 \cong 0{,}032$$

b)

$$P(|X - E(X)| \geq k.\sigma) < \frac{1}{k^2} \;\Rightarrow\; k.\sigma = k.\sqrt{p.q.n}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{12/19}} \Rightarrow \frac{1}{k^2} \cong 0{,}15775$$

$\Rightarrow$ 0,15775 es una cota superior para la verdadera probabilidad de 0,032.

13) Estadísticamente se sabe que una empresa de emergencias médicas recibe un promedio de 14 llamadas por hora.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora se reciba una cantidad de llamados que difieran de la media esperada en más de uno.
b) Comparar con la cota de Tchebycheff correspondiente.

a) <u>Experimento</u>: Estudio sobre frecuencia de llamadas en una empresa de emergencias.

Suceso (llamada) distribuido en forma aproximadamente homogénea en un continuo (tiempo).

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 14 \text{ llamadas/hora} \\ \Delta t = 1 \text{ hora}\end{array}\right\} \lambda = \delta.\Delta t = 14 \text{ llamadas} \quad \Rightarrow \quad X \sim Po(14) \; / \; \begin{cases} E(X) = 14 \\ Var(X) = 14 \end{cases}$$

$$P(|X-14| > 1) = 1 - P(|X-14| \le 1) = 1 - P(-1 \le X - 14 \le 1) = 1 - P(13 \le X \le 15) = 1 - P(X=13) - P(X=14) -$$

$$- P(X=15) = 1 - \frac{e^{-14}.14^{13}}{13!} - \frac{e^{-14}.14^{14}}{14!} - \frac{e^{-14}.14^{15}}{15!} \cong 0{,}6891$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(|X-14| > 1) \le P(|X-14| \ge 1) \\ P(|X-E(X)| \ge k.\sigma) < \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow P(|x-14| \ge 1) < \dfrac{1}{k^2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(|X-14| > 1) < \frac{1}{k^2} \; / \; k.\sigma = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 196$$

$\Rightarrow$ 196 es una cota superior para la verdadera probabilidad de 0,6891!

14) Una variable aleatoria responde a la siguiente distribución de probabilidades:

X	0	1	2	3
P(X)	0,1	0,3	0,5	0,1

a) Determine la probabilidad de que dicha variable difiera de su valor esperado en menos de 1,5.
b) Compare con la cota de Tchebycheff correspondiente.

a) Experimento: Cálculo de probabilidades y cotas sobre distribución dada.

$$E(X) = \sum_X P(X).X = 0{,}1.0 + 0{,}3.1 + 0{,}5.2 + 0{,}1.3 = 1{,}6$$

$$E(X^2) = \sum_X P(X).X^2 = 0{,}1.0^2 + 0{,}3.1^2 + 0{,}5.2^2 + 0{,}1.3^2 = 3{,}2 \Rightarrow Var(X) + E(X^2) - E^2(X) = 3{,}2 - 1{,}6^2 = 0{,}64$$

$$\Rightarrow E(X) = 1{,}6 \quad y \quad Var(X) = \sigma^2 = 0{,}8$$

$$P(|X-1{,}6| < 1{,}5) = P(-1{,}5 < X - 1{,}6 < 1{,}5) = P(0{,}1 < X < 3{,}1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1 - P(X=0) =$$
$$= 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

b)

$$P(|X - E(X)| < k.\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2} \;\Rightarrow\; k.\sigma = k.0{,}8 = 1{,}5 \Rightarrow k = \frac{1{,}5}{0{,}8} \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \left(\frac{0{,}8}{1{,}5}\right)^2 \cong 0{,}716$$

$\Rightarrow$ 0,716 es una cota inferior para la verdadera probabilidad de 0,9.

15) Un jugador hace tres tiros sobre un blanco. En el primero de ellos la probabilidad de acertar es del 50 %. En los tiros siguientes la probabilidad de acertar aumenta en 0,2 si acertó el tiro anterior y disminuye en 0,2 si no acertó.

a) Hallar la probabilidad de que, habiendo acertado solo una vez, lo haga en el primer disparo.

b) Hallar la función de probabilidad, esperanza y varianza para la variable "número de aciertos en los tres disparos".

c) Verificar el teorema de Tchebycheff para el suceso $|X - E(X)| < 2$ ***si "X" es la variable definida en el punto anterior.***

A: acierta el tiro. $\Rightarrow \bar{A}$: no acierta en el blanco.

1º tiro		2º tiro		3º tiro			aciertos
$P(1A) = 0,5$	$1A$	+0,2 $P(2A/1A) = 0,7$	$2A$	+0,2 $P(3A/1A2A) = 0,9$	$3A$	$P(AAA) = 0,315$	3
				$P(3\bar{A}/1A2A) = 0,1$	$3\bar{A}$	$P(AA\bar{A}) = 0,035$	2
		$P(2\bar{A}/1A) = 0,3$	$2\bar{A}$	-0,2 $P(3A/1A2\bar{A}) = 0,5$	$3A$	$P(A\bar{A}A) = 0,075$	2
				$P(3\bar{A}/1A2\bar{A}) = 0,5$	$3\bar{A}$	$P(A\bar{A}\bar{A}) = 0,075$	1
$P(1\bar{A}) = 0,5$	$1\bar{A}$	-0,2 $P(2A/1\bar{A}) = 0,3$	$2A$	+0,2 $P(3A/1\bar{A}2A) = 0,5$	$3A$	$P(\bar{A}AA) = 0,075$	2
				$P(3\bar{A}/1\bar{A}2A) = 0,5$	$3\bar{A}$	$P(\bar{A}A\bar{A}) = 0,075$	1
		$P(2\bar{A}/1\bar{A}) = 0,7$	$2\bar{A}$	-0,2 $P(3A/1\bar{A}2\bar{A}) = 0,5$	$3A$	$P(\bar{A}\bar{A}A) = 0,035$	1
				$P(3\bar{A}/1\bar{A}2\bar{A}) = 0,5$	$3\bar{A}$	$P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = 0,315$	0

a) M: acierta el primer tiro, N: acierta solo un tiro

$$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A\bar{A}\bar{A})}{P(A\bar{A}\bar{A} \cup \bar{A}A\bar{A} \cup \bar{A}\bar{A}A)} = \frac{P(A\bar{A}\bar{A})}{P(A\bar{A}\bar{A}) + P(\bar{A}A\bar{A}) + P(\bar{A}\bar{A}A)} = \frac{0,075}{0,075 + 0,075 + 0,035} = \frac{15}{37} \cong 0,45054$$

b) X: nº de aciertos $\Rightarrow$ X={0,1,2,3}

$$P(X = 0) = P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = 0,315$$
$$P(X = 1) = P(A\bar{A}\bar{A}) + P(\bar{A}A\bar{A}) + P(\bar{A}\bar{A}A) = 0,075 + 0,075 + 0,035 = 0,185$$
$$P(X = 2) = P(AA\bar{A}) + P(A\bar{A}A) + P(\bar{A}AA) = 0,035 + 0,075 + 0,075 = 0,185$$
$$P(X = 3) = P(AAA) = 0,315$$

Función de probabilidad:

X	0	1	2	3
P(X)	0,315	0,185	0,185	0,315

$$E(X) = \sum_X P(X).X = 0{,}315.0 + 0{,}185.1 + 0{,}185.2 + 0{,}315.3 = 1{,}5$$

$$E(X^2) = \sum_X P(X).X^2 = 0{,}315.0^2 + 0{,}185.1^2 + 0{,}185.2^2 + 0{,}315.3^2 = 3{,}76$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3{,}76 - 1{,}5^2 = 1{,}51$$

c) T. De Tchebycheff: $P(|X - E(X)| < k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$k.\sigma = 2 \Rightarrow k = \dfrac{2}{\sqrt{1{,}51}} \cong 1{,}63 \quad \Rightarrow$ Cota: $1 - \frac{1}{k^2} = 0{,}6225$

$$P(|X - E(X)| < 2) = P(|X - 1{,}5| < 2) = P(1{,}5 - 2 < X < 1{,}5 + 2) = P(-0{,}5 < X < 3{,}5) = 1$$

Como $1 \geq 0{,}6225$ se verifica la desigualdad de Tchebycheff

16) Se sabe por estudios de campo previos que en una ciudad existen en promedio 0,8 negocios de cierto ramo por manzana.
a) Tomando al azar un grupo de 10 manzanas ¿Cuál es la probabilidad de encontrar por lo menos 5 negocios en ellas?
b) Si se toman 15 grupos de 10 manzanas cada uno ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo en dos de ellos se encuentren por lo menso 5 negocios de dicho ramo?
c) Si en vez de tomar 15 grupos de 10 manzanas se elige al azar un solo grupo de 150 manzanas, ¿Cuál es la probabilidad de encontrar por más de10 negocios en ellas?

a) X: nº de negocios en un grupo de 10 manzanas.

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 0{,}8 \text{ negocios / manzana} \\ \Delta S = 10 \text{ manzanas} \end{array}\right\} \lambda = \delta.\Delta t = 8 \text{ negocios} \quad \Rightarrow \quad X \sim Po(8)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(x = 3) - P(X = 4) =$$
$$= 1 - \frac{e^{-8}.8^0}{0!} - \frac{e^{-8}.8^1}{1!} - \frac{e^{-8}.8^2}{2!} - \frac{e^{-8}.8^3}{3!} - \frac{e^{-8}.8^4}{4!} \cong 0{,}90037 \cong 0{,}9$$

b) Y: nº de grupos de 10 manzanas, entre 15 tomados, que tienen por lo menos 5 negocios en ellas.

Éxito: por lo menos 5 negocios en las 10 manzanas $\Rightarrow$ p=0,9
n=15 grupos de 10 manzanas cada uno.

$$\Rightarrow Y \sim Bi(15;\ 0{,}9) \quad \Rightarrow P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \binom{15}{0} 0{,}9^0.0{,}1^{15} + \binom{15}{1} 0{,}9^1.0{,}1^{14} \binom{15}{2} 0{,}9^2.0{,}1^{13} \cong 8{,}5.10^{-12}$$

Probabilidad muy pequeña. Es decir prácticamente imposible.

c) X: nº de negocios en un grupo de 150 manzanas.

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 0{,}8 \text{ negocios / manzana} \\ \Delta S = 150 \text{ manzanas}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \delta.\Delta t = 120 \text{ negocios} \quad \Rightarrow \quad X \sim Po(120) \quad \Rightarrow \quad \lambda \to \infty \text{ aproximacón normal}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = \lambda = 120 \\ \sigma^2 = \lambda = 120\end{array}\right\} \Rightarrow X \sim N(120{,}120)$$

$$P(X > 10) = P(X > 10{,}5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{10{,}5-120}{\sqrt{120}}\right) = P(Z > -9{,}996) \cong 1$$

17) Una caja contiene 8 bolillas blancas y 2 negras. Se extrae una bolilla, si resulta blanca se la deja fuera, si es negra se la vuelve a poner en la caja. A continuación se repite el experimento una vez más (sí es blanca se la deja fuera, sí es negra se la vuelve a introducir).

a) Hallar la probabilidad de que habiendo resultado una extracción de cada color, la blanca sea la primera extraída.

b) Hallar la función de probabilidad de la variable "nº de bolillas negras extraídas". Calcular esperanza y varianza.

c) Verifique la desigualdad de Tchebycheff para el suceso $|X-\mu| > 1{,}5$ donde "X" es la variable definida en el ítem anterior.

B: bolilla blanca, N: bolilla negra.

						bolillas negras
8 blancas,2 negras	$P(1B) = 8/10$	1B	$P(2B/1B) = 7/9$	2B	P(BB)=28/45	0
			$P(2N/1B) = 2/9$	2N	P(BN)=8/45	1
	$P(1N) = 2/10$	1N	$P(2B/1N) = 8/10$	2B	P(NB)=4/25	1
			$P(2N/1N) = 2/10$	2N	P(NN)=1/25	2

a) N: primera extraída blanca, M: extraída una de cada color

$$P(N/M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{P(BN)}{P(BN \cup NB)} = \frac{P(BN)}{P(BN) + P(NB)} = \frac{8/45}{8/45 + 4/25} = 10/19 \cong 0{,}5263$$

b) X: nº de bolillas negras extraídas $\Rightarrow$ X={0,1,2}

P(X=0)=P(BB)=28/45
P(X=1)=P(BN)+P(NB)=8/45+4/25=76/225
P(X=2)=P(NN)=1/25

Función de probabilidad:

X	0	1	2
P(X)	28/45	76/225	1/25

$$E(X) = \sum_X P(X).X = \frac{28}{45}.0 + \frac{76}{225}.1 + \frac{1}{25}.2 = \frac{94}{225} \cong 0{,}42$$

$$E(X^2)=\sum_x P(X).X^2=\frac{28}{45}.0^2+\frac{76}{225}.1^2+\frac{1}{25}.2^2=\frac{112}{225}$$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{112}{225}-\left(\frac{94}{225}\right)^2=\frac{16364}{50625}\cong 0{,}3232$$

c) T. De Tchebycheff: $P(|X-E(X)|\geq k.\sigma)<\frac{1}{k^2}$

Según el dato: $|X-\mu|>1{,}5$

$k.\sigma=21{,}5\Rightarrow k=\frac{1{,}5}{\sqrt{0{,}3232}}\cong 2{,}64\quad\Rightarrow$ Cota: $\frac{1}{k^2}\cong 0{,}1435$

$$P(|X-E(X)|\geq 1{,}5)=P(|X-0{,}42|\geq 1{,}5)=P(X\leq 0{,}42-1{,}5\vee X\geq 0{,}42+1{,}5)=P(X\leq -1{,}08\ \vee\ X\geq 1{,}92)=$$

$$=P(X\leq -1{,}08)+P(X\geq 1{,}92)=0+1/25=0{,}04$$

Como $0{,}04<0{,}1435$ se verifica la desigualdad de Tchebycheff

18) La longitud de ciertas piezas se distribuye normalmente con una media de 2,50 cm y un desvío de 0,05 cm.

a) Hallar la probabilidad de que una pieza elegida al azar tenga una longitud de más de 2,60 cm.

b) Si se toman 10 piezas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 de ellas tengan más de 2,60 cm?

c) Si se toman 100 piezas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 5 de ellas tengan más de 2,60 cm?

X: longitud de ciertas piezas, expresada en cm.

$X\sim N(\mu;\sigma^2)\quad /\quad \mu=2{,}50\quad y\quad \sigma=0{,}05$

a) $P(X>2{,}60)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{2{,}60-2{,}50}{0{,}05})=P(Z>2)=1-F(2)=1-0{,}97725=0{,}02275$

b) Y: nº de piezas, entre 10, con una longitud mayor a los 2,60 cm.

Éxito: longitud de la pieza mayor a 2,60 cm$\Rightarrow$ p=0,02275$\cong$0,023
n=10 piezas.

$\Rightarrow\ Y\sim Bi(10;\ 0{,}023)$

$$\Rightarrow\ P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-\binom{10}{0}0{,}023^0.0{,}977^{10}-\binom{10}{1}0{,}023^1.0{,}977^9\cong 0{,}0211$$

c) c) Y: nº de piezas, entre 100, con una longitud mayor a los 2,60 cm.

Éxito: longitud de la pieza mayor a 2,60 cm$\Rightarrow$ p=0,02275$\cong$0,023
n=100 piezas.

$$\Rightarrow \ Y \sim Bi(100;\ 0{,}023) \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = 0{,}023 \to 0 \\ n = 100 \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow E(X) = n.p = 2{,}3 < 5 \Rightarrow \ Y \sim Po(\lambda) \ / \ \lambda = 2{,}3$$

$$P(Y \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-2,3}.2{,}3^{x}}{x!} \cong 0{,}97$$