Materia: Probabilidad y Estadística II – Estadística II
Tema: Cálculo de probabilidades

1) Dos cazadores A y B pueden matar a su presa en el 50 % y en el 25 % de sus respectivos tiros. Deciden salir a cazar los dos juntos, con la regla de que debe hacer un disparo c/u, si fallan vuelven a hacer un disparo c/u y así sucesivamente ¿Cuál es la probabilidad de que maten a su presa en la segunda ronda de disparos, si
a) los dos disparan sucesivamente en el orden A-B?
b) los dos disparan simultáneamente?

Los sucesos los denoto como:
1A: suceso "1A" le pega a la presa en el primer disparo. 2B: suceso "B" le pega a la presa en el segundo disparo, etc. Siempre $P(A) = 0,5 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,5$ y $P(B) = 0,25 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,75$ (no depende uno del otro).

a) Si la matan en la segunda ronda significa que en la primera ninguno le pegó y que en la segunda le pegó A o le pegó B.

$$P(2^{da}\ \text{ronda}) = P[(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A) \cup (1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2\overline{A} \cap 2B)] = P(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A) + P(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2\overline{A} \cap 2B) =$$
$$= P(1\overline{A}).P(1\overline{B}).P(2A) + P(1\overline{A}).P(1\overline{B}).P(2\overline{A})P(2B/1\overline{A}) = 0,5.0,75.0,5 + 0,5.0,75.0,5.0,25 = 0,234375$$

b) Si la matan en la segunda ronda significa que en la primera ninguno le pegó y que en la segunda por lo menos uno de ellos le pegó.

$$P(2^{da}\ \text{ronda}) = P[(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A \cap 2\overline{B}) \cup (1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2\overline{A} \cap 2B) \cup (1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A \cap 2B)] =$$
$$= P(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A \cap 2\overline{B}) + P(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2\overline{A} \cap 2B) + P(1\overline{A} \cap 1\overline{B} \cap 2A \cap 2B)] =$$
$$= P(1\overline{A}).P(1\overline{B}).P(2A).P(2\overline{B}) + P(1\overline{A}).P(1\overline{B}).P(2\overline{A}).P(2B) + P(1\overline{A}).P(1\overline{B}).P(2A).P(2B) =$$
$$= 0,50.0,75.0,50.0,75 + 0,50.0,75.0,50.0,25 + 0,50.0,75.0,50.0,25 = 0,234375$$

Los resultados son iguales debido a la independencia de los tiradores.

2) En una reunión se encuentran 4 matrimonios. Determinar la probabilidad de que las mujeres sean del mismo signo zodiacal.

Las mujeres son independientes entre sí y la presencia de los maridos no cuenta. Si "X" es el suceso "ser del signo X" y teniendo en cuenta que hay 12 signos:

$$P(\text{Todas del mismo signo}) = 12.P(1X \cap 2X \cap 3X \cap 4) = 12.P(1X).P(2X).P(3X).P(4X) = 12.\frac{1}{12}.\frac{1}{12}.\frac{1}{12}.\frac{1}{12} =$$
$$= \frac{1}{1728} \cong 0,0005787$$

3) Dos personas A y B, juegan al truco (se reparten tres cartas sin reposición a cada una de un mazo de 40 cartas). Determinar la probabilidad de que A reciba flor (Tres cartas del mismo palo).

Experimento: extracciones sin reposición de 6 cartas de un mazo de 40.

Son extracciones sucesivas sin reposición, por lo tanto sucesos dependientes; pero el orden de las extracciones no modifica el resultado. Así, es lo mismo que se alternen al repartir las cartas (por ejemplo:

una a "A", otra a "B"; nuevamente a "A" y después a "B", y así sucesivamente) o que se den todas primero a un jugador y luego a otro (por ejemplo: primero las tres a "A" y luego las tres a "B").

Si reparten una y una, empezando por "A": La primera que le toca a "A" puede ser cualquiera y es la que define de que palo va a ser la flor.

Por ejemplo 2A representa el suceso "la segunda carta dada a "A" es del mismo palo que la primera de "A" " y $1\overline{B}$ representa el suceso "la primer carta dada a "B" no es del mismo palo que la primera de "A" ".

$$P(A\,flor) = P\left|(1B \cap 2A \cap 2B \cap 3A) \cup (1B \cap 2A \cap 2\overline{B} \cap 3A) \cup (1\overline{B} \cap 2A \cap 2B \cap 3A) \cup (1\overline{B} \cap 2A \cap 2\overline{B} \cap 3A)\right| =$$

cada posibilidad de "barajada" es excluyente de todas las otras:

$$= P(1B \cap 2A \cap 2B \cap 3A) + P(1B \cap 2A \cap 2\overline{B} \cap 3A) + P(1\overline{B} \cap 2A \cap 2B \cap 3A) \cup P(1\overline{B} \cap 2A \cap 2\overline{B} \cap 3A) =$$

los sucesos son dependientes:

$$= P(1B)P(2A/1B).P(2B/1B \cap 2A).P(3A/1B \cap 2A \cap 2B) + P(1B)P(2A/1B).P(2\overline{B}/1B \cap 2A).P(3A/1B \cap 2A \cap 2\overline{B}) +$$

$$+ P(1\overline{B})P(2A/1\overline{B}).P(2B/1\overline{B} \cap 2A).P(3A/1\overline{B} \cap 2A \cap 2B) + P(1\overline{B})P(2A/1\overline{B}).P(2\overline{B}/1\overline{B} \cap 2A).P(3A/1\overline{B} \cap 2A \cap 2\overline{B}) =$$

$$= \frac{9}{39}.\frac{8}{38}.\frac{7}{37}.\frac{6}{36} + \frac{9}{39}.\frac{8}{38}.\frac{30}{37}.\frac{7}{36} + \frac{30}{39}.\frac{9}{38}.\frac{8}{37}.\frac{7}{36} + \frac{30}{39}.\frac{9}{38}.\frac{29}{37}.\frac{8}{36} = \frac{12}{247} \cong 0{,}04858$$

Observen dos cosas: No incluí la primera extracción de "A" (P(extraer cualquier carta)=40/40=1) aunque pude hacerlo y por otro lado tampoco incluí la tercer extracción de "B" que hubiese desdoblado los caso (en 8 en vez de 4 debido a $3B$ y $3\overline{B}$), pero que llevarían al mismo resultado (compruébenlo!).

Si reparten las tres primeras a "A" y luego las tres siguientes a "B".

$$P(A\ \ flor) = P(1A \cap 2A \cap 3A \cap X) = P(1A).P(2A/1A).P(3A/1A \cap 2A).P(X/1A \cap 2A \cap 3A) =$$
$$= \frac{40}{40}.\frac{9}{39}.\frac{8}{38}.1 = \frac{12}{247} \cong 0{,}04858$$

Aquí puse explícitamente el hecho de que la primera carta extraída por "A" puede ser cualquiera. ¿Qué es "X"? el suceso se dan tres cartas a "B". Verán que la probabilidad de dicho suceso, dado que a "A" se le dieron tres cartas del mismo palo, es "1" (no importa que recibió "A", "B" recibe tres cartas y no me importa cuales).
¿Puede pensarse de otra manera? Sí, como extracciones sin reposición de un bolillero (distribución hipergeométrica). Si elijo un palo cualquiera las extracciones de "A" (barajas) serán éxitos (del palo elegido) o fracasos (de los otros palos), así:

X: número de barajas extraídas (sin reposición) del palo elegido.

N=40 barajas, N_E=10 las del palo elegido,N_F=30 las de los otros palos y n=3 cantidad de barajas extraídas por "A".
$\Rightarrow X \sim H(40,10,3)$

$$P(A\ \ \text{flor}) = 4.\frac{\binom{10}{3}\binom{30}{0}}{\binom{40}{3}} = 4.\frac{120.1}{9880} = \frac{12}{247} \cong 0{,}04858$$

El "4" se debe a que yo había elegido <u>un</u> palo y son en realidad 4 palos equivalentes.
Se pudo resolver así por lo mismo de antes: no importa el orden de las extracciones!! Ojo no siempre es así, si yo "rompo la simetría" del problema hay que considerar el orden .

4) En cierta distribuidora de mercadería se reciben pedidos de tres maneras distintas: el 15% de ellos vía Internet, el 35% telefónicamente y el resto por medio de corredores.
La eficiencia en el despacho de tales pedidos difiere según en qué forma fueron recibidos. Así, el 90% de los pedidos hechos por Internet pueden ser enviados en las 24 hs. ; de igual forma el 80% de los telefónicos y el 30% de los tomados por corredores.
Si en un determinado día llegaron 425 pedidos:
a) ¿Cuántos de ellos habrán sido tomados telefónicamente y no despachados en las 24 hs?
b) Sabiendo que cierto pedido fue despachado dentro de las 24 hs., ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido tomado por un corredor?

<u>Experimento</u>: comportamiento de pedidos en una distribuidora de mercadería

<u>Sucesos</u>: I: pedido recibido por Internet C: pedido tomado por un corredor
T: " " telefónicamente E: " enviado dentro de las 24 hs.

<u>Datos</u>: P(I)=0,15 P(T)=0,35 P(C)=0,50 P(E/I)=0,90 P(E/T)=0,80 P(E/C)=0,30

a) N= 425 pedidos en un cierto día.

$$P(T \cap \overline{E}) = p(T).P(\overline{E}/T) = 0{,}35.0{,}20 = 0{,}07 \Rightarrow f = P(T \cap \overline{E}).N = 0{,}07.425 \cong 30$$

b)

$$P(C/E) = \frac{P(C).P(E/C)}{P(I).P(E/I) + P(T).P(E/T) + P(C).P(E/C)} = \frac{0{,}5.0{,}30}{0{,}15.0{,}90 + 0{,}35.0{,}80 + 0{,}50.0{,}30} \cong 0{,}2655$$

5) Una urna contiene 5 bolillas rojas y 3 blancas. Se elige una bolilla al azar, se descarta, y se colocan en la urna dos bolillas del color contrario. Se elige ahora una segunda bolilla. Halle la probabilidad de que:
a)La segunda bolilla sea roja
b)Ambas sean del mismo color.

<u>Experimento</u>: Juego de extracciones y reposiciones en urnas.

5 Rojas, 3 Blancas $\rightarrow$

$P(1R) = 5/8 \rightarrow$ 4 Rojas, 5 Blancas $\rightarrow$ $P(2R/1R) = 4/9, P(2B/1R) = 5/9$

$P(1B) = 3/8 \rightarrow$ 7 Rojas, 2 Blancas $\rightarrow$ $P(2R/1B) = 7/9, P(2B/1B) = 2/9$

a)

$$P(\text{segunda roja}) = P(2R) = P\{(1B \cap 2R) \cup (1R \cap 2R)] = P(1B).P(2R/1B) + P(1R).P(2R/1R) = \frac{3}{8}.\frac{7}{9} + \frac{5}{8}.\frac{4}{9} = \frac{41}{72}$$

b)

$$P(\text{ambas del mismo color}) = P\{(1B \cap 2B) \cup (1R \cap 2R)] = P(1B).P(2B/1B) + P(1R).P(2R/1R) = \frac{3}{8}.\frac{2}{9} + \frac{5}{8}.\frac{4}{9} = \frac{13}{36}$$

6) En una empresa tres personas -P_1, P_2 y P_3- son las encargadas de ingresar por teclado la información de todos los movimientos relacionados con el sistema de compras. A partir de la experiencia recogida se sabe que el 40% de los datos son ingresados por P_1, el 25% por P_2 y el 35% por P_3. Asimismo se sabe que cada uno de ellos comete errores sobre su producción, de acuerdo a los siguientes porcentajes: P_1 del 1%, P_2 del 2% y P_3 del 4%.
a) Si un cierto día se registran en promedio 320 movimientos, ¿Cuántos de ellos se espera que ingrese P_1 y contengan errores?
b) Se toma un movimiento ingresado y se chequea con el formulario original, y resulta ser un movimiento con error. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido generado por P_2?

Experimento: comportamiento de ingresos en compras

Sucesos: P_1: movimiento ingresado por "P_1", P_2: movimiento ingresado por "P_2"
P_3: movimiento ingresado por "P_3" E: error en el ingreso de movimiento

Datos: $P(P_1)=0{,}40$ $P(P_2)=0{,}25$ $P(P_3)=0{,}35$ $P(E/P_1)=0{,}01$ $P(E/P_2)=0{,}02$ $P(E/P_3)=0{,}04$

a) N= 320 movimientos en un cierto día.

$$P(P_1 \cap E) = p(P_1).P(E/P_1) = 0{,}40.0{,}01 = 0{,}004 \Rightarrow f = P(P_1 \cap E).N = 0{,}004.320 = 1{,}28 \cong 1$$

b)

$$P(P_2/E) = \frac{P(P_2).P(E/P_2)}{P(P_1).P(E/P_1) + P(P_2).P(E/P_2) + P(P_3).P(E/P_3)} = \frac{0{,}25.0{,}02}{0{,}40.0{,}01 + 0{,}25.0{,}02 + 0{,}35.0{,}04} \cong 0{,}2174$$

7) Un recién graduado solicita empleo en la compañía "X" y en la compañía "Z".
Se estima que la probabilidad de ser rechazado por lo menos por una de las compañías es 0,55 y que las probabilidades de ser contratado son de 0,56 y 0,72 respectivamente.
a) ¿Cuál es la probabilidad de ser aceptado por lo menos por una compañía?
b) ¿Cuál es la probabilidad de ser rechazado por "Z" si fue aceptado por "X"?

Experimento: ser empleado por las compañías X y Z.

Sucesos: X: ser aceptado por la compañía "X", Z: ser aceptado por la compañía "Z".

Datos: $P(\text{rechazado por lo menos por una}) = P(\overline{X} \cup \overline{Z}) = 0{,}55$
$P(\text{contratado por "X"}) = P(X) = 0{,}56$, $P(\text{contratado por "Z"}) = P(Z) = 0{,}72$

a)

$$P(\text{aceptado por lo menos por una}) = P(X \cup Z) = P(X) + P(Z) - P(X \cap Z)$$

pero $P(\text{rechazado por lo menos por una}) = 1 - P(\text{rechazado por ninguna}) = 1 - P(X \cap Z) \Rightarrow$

$$0{,}55 = 1 - P(X \cap Z) \Rightarrow P(X \cap Z) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

(Observe que los sucesos <u>no</u> son estadísticamente independientes: $P(X \cap Z) \neq P(X).P(Z)$)

$$\Rightarrow P(X \cup Z) = 0{,}56 + 0{,}72 - 0{,}45 = 0{,}83$$

b)

$$P(\text{rechazado por "Z" si fue aceptado "X"}) = P(\overline{Z}/X) = 1 - P(Z/X) = 1 - \frac{P(X \cap Z)}{P(X)} = 1 - \frac{0{,}45}{0{,}56} \cong 0{,}1964$$